19/10/2020

Τοπολογικές ιδιότητες του $\mathbb{R}^n$

Θέμα: Ανοιχτά και κλειστά σύνολα και ιδιότητες που βασίζονται πάνω σ' αυτές

Παράδειγμα: Το $(0,1) \subset \mathbb{R}$ λέμε ότι είναι ανοιχτό διάστημα, ενώ το $[0,1]$ είναι κλειστό διάστημα

• Ποια η (μία) διαφορά τους?

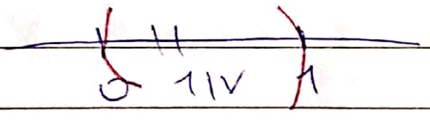
π.χ. για το $(0,1)$ παρατηρούμε ότι $\forall \nu \in \mathbb{N} = \{1,2,\dots\}$:

: $\frac{1}{\nu} \in (0,1)$, $\nu \geq 2$ αλλά $\frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \notin (0,1)$ (*)

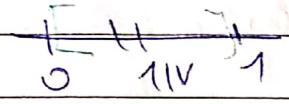
Ενώ για το $[0,1]$ (*) έχουμε: $\frac{1}{\nu} \in [0,1]$,

$\frac{1}{\nu} \xrightarrow[\nu \to \infty]{} 0 \in [0,1]$

(*) $\Leftrightarrow \left|\frac{1}{\nu} - 0\right| \xrightarrow{\nu \to \infty} 0$: απόσταση του $\frac{1}{\nu}$ απ' το 0



(*)



• Γιατί τόσος "ντόρος" για ανοιχτά ή κλειστά διαστήματα ή σύνολα?

Απλούστερη περίπτωση:

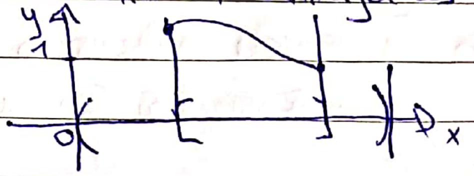
$f: (0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$, είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη

(⇒ ∄ μέγιστο για την f)

ενώ π.χ. η $g_\varepsilon : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}$, $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{x}$

($\varepsilon \in (0,1)$ σταθερό) είναι συνεχής και φραγμένη

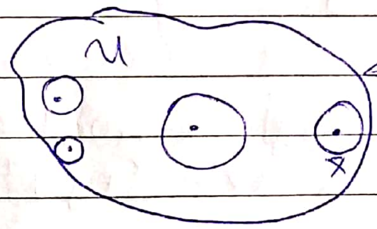
⇒ για μια συνάρτηση με ίδιο τύπο, δηλ. κανόνα αντιστοίχισης (ως προς τη συνέχεια), $x \to f(x)$ ή $g_\varepsilon(x)$, τα χαρακτηριστικά της αλλάζουν σύμφωνα με το αν το πεδίο/διάστημα στον $\mathbb{R}$ ορισμού της είναι ανοικτό ή κλειστό διάστημα. (Δεν αλλάζει ως προς τη συνέχεια, αλλάζει ως προς το εάν είναι φραγμένη ή όχι)



Βασικότερος ορισμός της τοπολογίας (εδώ για το $\mathbb{R}^n$)

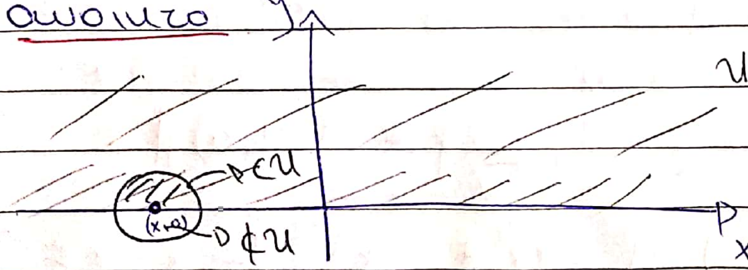
Ένα (υπο-)σύνολο $U \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται ανοικτό αν $\forall \bar{x} \in U \ \exists \varepsilon > 0 : B(\bar{x}, \varepsilon) := \{\bar{y} \in \mathbb{R}^n : \|\bar{y} - \bar{x}\| < \varepsilon\}$

$B(\bar{x}, \varepsilon) \subset U$



∂U = σύνορο του U
[Το U είναι μόνο το "εσωτερικό" της καμπύλης του συνόρου]

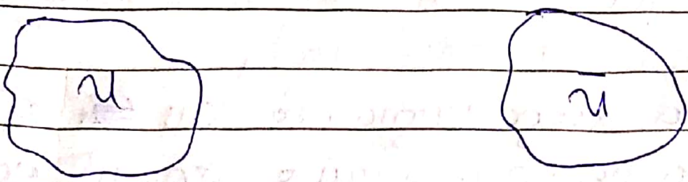
• Αυτό ισχύει για όλα τα (υπο)σύνολα του $\mathbb{R}^n$?
Όχι. π.χ. $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$ δεν είναι ανοικτό ⇑



αφού δεν ισχύει: $\forall (x,y) \in U : \exists \varepsilon > 0 : B((x,y), \varepsilon) \subset U$. [≠⇒: Κανονικό?]
δηλ. $\exists (x,y) \in U : \forall \varepsilon > 0 : B((x,y), \varepsilon) \not\subset U$ π.χ. όλα τα $(x,y) = (x,0)$

Ένα $U \subset \mathbb{R}^n$ λέγεται <u>κλειστό</u>, αν $\mathbb{R}^n \setminus U$ $(=: U^c)$ είναι ανοικτό

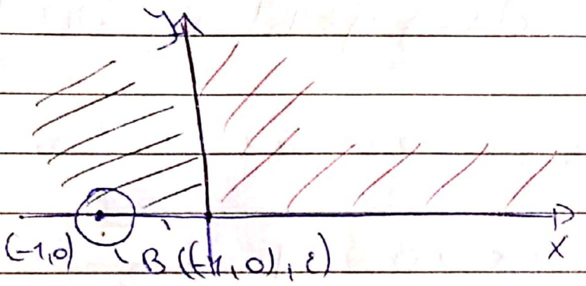
!!! Τα περισσότερα σύνολα δεν είναι ούτε ανοικτά ούτε κλειστά



U = χωρίς το σύνορο ∂U

Το U είναι ανοικτό, δηλ. δεν περιέχει $(x,y) \in \partial U$, το $\bar{U}$ είναι κλειστό, περιέχει και τα $(x,y) \in \partial U$

Το $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x < 0, y \geq 0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y > 0\}$ $(\subset \mathbb{R}^2)$ δεν είναι ούτε ανοικτό ούτε κλειστό



Δεν είναι ανοικτό, αφού π.χ. $(-1,0) \in U$, αλλά $\forall \varepsilon > 0$

$$\underbrace{B((-1,0),\varepsilon)}_{\not\subset U} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x,y) - (-1,0)\| < \varepsilon\}$$

$$\|(x,y) - (-1,0)\| = ((x+1)^2 + y^2)^{1/2}$$

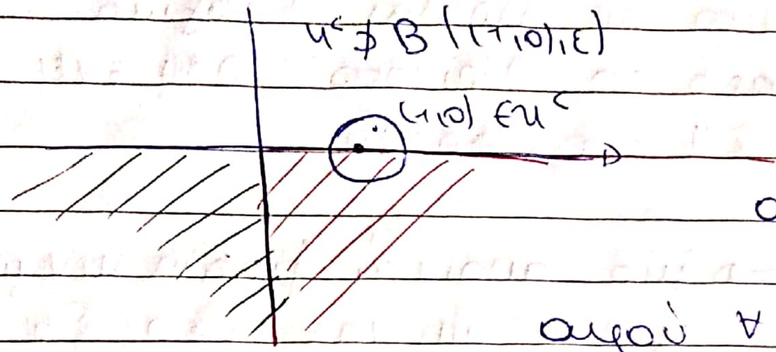
αφού το σημείο $\left(-1, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \in B((-1,0),\varepsilon)$

αλλά $\left(-1, -\frac{\varepsilon}{2}\right) \notin U$

(*) Πράγματι ισχύει: $\left\|\left(-1, -\frac{\varepsilon}{2}\right) - (-1,0)\right\| =$

$= \left\|\left(-1-(-1), -\frac{\varepsilon}{2} - 0\right)\right\| = \sqrt{0^2 + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$

Επίσης το U δεν είναι κλειστό, αφού το
$U^c \ (= \mathbb{R}^2 \setminus U) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x<0, y<0}_{\text{γνήσιο}}\} \cup \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : \underbrace{x\geq 0, y\leq 0}_{\text{μη-γνήσιο}}\}$



Δεν είναι ανοικτό

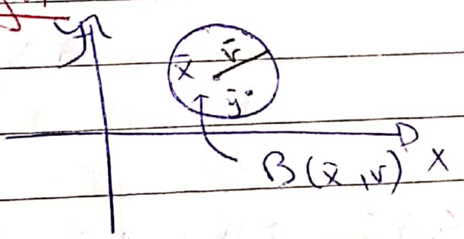
αφού π.χ. για $(1,0) \in U^c$ $\nexists$ $\varepsilon > 0 : B((1,0),\varepsilon) \subset U^c$, αφού $\forall \varepsilon > 0$ το $\left(1, \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \in B((1,0),\varepsilon)$

αλλά $\left(1, \frac{\varepsilon}{\nu}\right) \notin U^c$

Πρόταση: Έστω $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $r>0$ (δοσμένη σταθερά) τότε η ανοικτή μπάλα κέντρου $\bar{x}$ και ακτίνας $r>0$, δηλ. το $U = B(\bar{x},r) = \{\bar{y}\in\mathbb{R}^n : \|\bar{y}-\bar{x}\| < r\}$ είναι ανοικτό

Απόδειξη: Ιδέα! (διαίσθηση $\neq$ απόδειξη) αλλά απαραίτητη για να δω πώς μπορώ ίσως να το αποδείξω)

$\boxed{n=2}$



Πρέπει $\forall \bar{y} \in U$ να βρω ένα $\varepsilon > 0$ ε.ω. $B(\bar{y},\varepsilon) \subset U$